

Dinámica de un sistema producción-inventario con restricción de capacidad

F. D. Cuccioletta, A. Harari, and L. P. Lara

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario.

Av. Pellegrini 250, (S2000BTP) Rosario, Santa Fe, Argentina.
{federicocuccioletta, ah.albertoharari}@gmail.com, lplara@fceia.unr.edu.ar

Abstract. Los sistemas de producción-inventario son estudiados a través de modelos lineales y no lineales, determinándose sus propiedades mediante códigos numéricos. El aporte de este trabajo es la aplicación de la teoría de sistemas dinámicos al análisis de un modelo no lineal de un sistema de este tipo. Este enfoque nos permitió caracterizar en forma rigurosa su dinámica, sin la necesidad de recurrir a métodos numéricos. Demostramos que la política de decisión propuesta conduce a soluciones no oscilatorias y por lo tanto no es posible el régimen caótico.

Key words: Ecuaciones Diferenciales, Inventario – Producción, Sistemas Dinámicos

1 Introducción

El objetivo por excelencia de las empresas es el aumento de la productividad con miras a mantener o mejorar la competitividad. La continua búsqueda en ese sentido ha devenido en la implementación de una serie de herramientas y técnicas que apuntan a la mejora de procesos y a la toma de mejores decisiones. Entre ellas, la que está más en boga es la Investigación Operativa, cuya aplicación ha logrado grandes resultados a nivel industrial. Sin embargo, algunas de las soluciones que de ella se derivan adolecen de no propiciar una visión sistémica de la organización o el sector donde se utilizan. Un ejemplo es la optimización de los costos de la gestión de stock para determinar las políticas de control de inventario[1]. Por tratarse de la optimización de un subsistema, su concreción no garantiza la optimización del sistema global (de la organización)[2].

En la década de los 60, J. W. Forrester[3] dió inicio a la Dinámica Industrial, la cual tiene por finalidad la modelización y análisis de sistemas o subsistemas industriales. En los últimos años, esta disciplina ha cobrado mayor importancia y difusión gracias a la bibliografía presentada por autores como J. D. Sterman [4] y P. Senge [5]. Éstos la destacan como una de las principales herramientas para lograr un enfoque sistémico a la hora de abordar y resolver los problemas que surgen en el sistema bajo estudio.

En este trabajo, construimos un modelo no lineal simple de un sistema de producción-inventario basándonos en los trabajos de J. W. Forrester [3] y J.

D. Sterman [4]. A diferencia de ellos, optamos por llevar a cabo el análisis del modelo utilizando la teoría cualitativa de sistemas dinámicos[6][7][8] con el fin de caracterizar en forma completa su comportamiento. A la hora de evaluar la efectividad de la política de decisión propuesta nos basamos en los criterios de mejora utilizados por M. Saleh et al[9]: la disminución de las oscilaciones y el aumento de la velocidad de respuesta. Esto es lógico si consideramos que la presencia de oscilaciones en la tasa de producción provoca variaciones en la tasa de utilización de recursos y dificultades en la programación de la producción, y que una respuesta lenta implica ausencia de flexibilidad.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección 2, comenzamos haciendo una descripción general del modelo que concluye con el sistema de ecuaciones del mismo. Dicho sistema da lugar a la definición de dos regiones, en las cuales las propiedades del modelo son diferentes. Éstas son estudiadas en detalle en los apartados 3 y 4. Por último, en la sección 5 discutimos los resultados y en la 6 presentamos las conclusiones.

2 Descripción del modelo de producción

2.1 Hipótesis del modelo y notación

Los supuestos sobre los que se basa el modelo se dan a continuación:

- La demanda es constante.
- La disponibilidad de materia prima es ilimitada.
- La capacidad máxima m incluye horas extra y horas subcontractadas, y las demoras asociadas a la producción son independientes del recurso empleado para producir (horas normales, horas extra u horas subcontractadas).
- La tasa de producción es aproximadamente continua, pudiendo variar desde cero a m (no hay grandes discontinuidades en la tasa relacionadas con cuestiones técnicas y/o económicas).
- La decisión acerca de cuánto producir (tasa de producción) se determina en función del estado actual del modelo. Como consecuencia, consideramos que contamos con información relativamente exacta y oportuna.
- La distribución de probabilidades de las demoras de las diferentes etapas del proceso se supone exponencial.
- Al aumentar la cantidad de pedidos aumenta la tasa de entrega, no habiendo limitantes en la capacidad de atención de pedidos.
- Las variables de estado son positivas.

En este trabajo utilizamos la siguiente notación:

VARIABLES DE ESTADO

x_1 : productos en curso de elaboración (WIP).

x_2 : inventario real de productos finales.

x_3 : productos pedidos pendientes de entrega.

x_4 : productos cuya orden de producción está en proceso administrativo.

Parámetros

- d_1 : demora media del proceso productivo (lead time de producción).
- d_2 : demora media mínima de entrega de pedidos.
- d_3 : demora media adicional de entrega de pedidos cuando el stock es igual al deseado.
- d_4 : demora media del proceso administrativo de órdenes de producción (lead time administrativo).
- α : factor de amplificación usado para la decidir la tasa de producción.
- s : stock de seguridad definido como cantidad de tiempo que se espera que el inventario cubra el nivel de demanda actual en caso que la tasa de salida del proceso de producción sea nula.
- m : capacidad máxima de producción.
- r_0 : demanda.

2.2 Ecuaciones

Comencemos por describir la estructura del modelo, recurriendo a la Fig. 1 para lograr una mejor comprensión. La demanda r_0 determina la tasa T_4 a la que

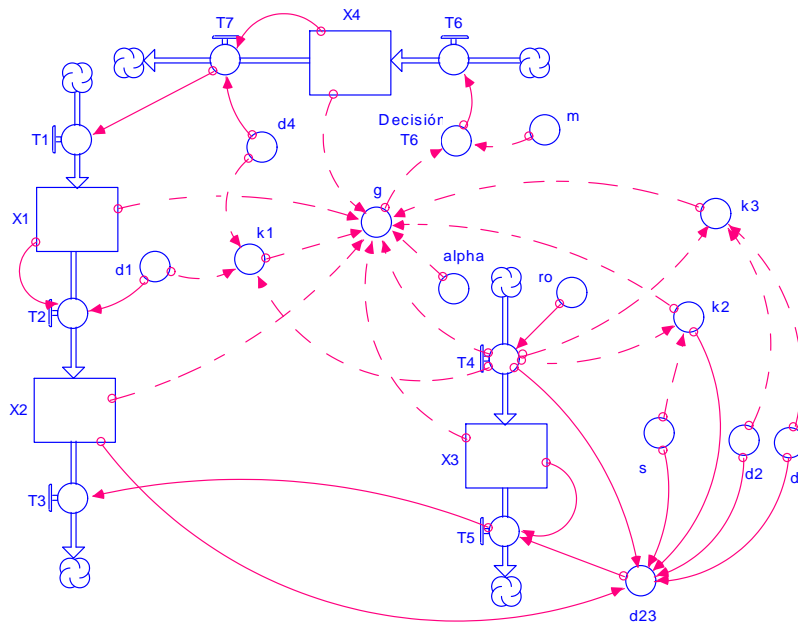


Fig. 1. Cursograma del modelo producción-inventario. Por limitaciones del software utilizado al parámetro α le llamamos *alpha* en esta fig.

ingresan los pedidos. La información sobre la cantidad de pedidos pendientes de entrega x_3 , junto a la del nivel de inventario x_2 , las órdenes en proceso administrativo x_4 y el WIP x_1 se utilizan para determinar la decisión acerca de cuánto ordenar a producción, es decir la tasa T_6 . Con esa frecuencia arriban las órdenes al proceso administrativo, que consiste, entre otras cosas, en la programación de las mismas. Por lo tanto, la demora asociada d_4 no sólo comprende cuestiones burocráticas sino que también está relacionada con la disponibilidad de recursos y prioridades asignadas durante el secuenciamiento[10]. Una vez cumplida la mencionada demora, las órdenes ingresan a producción a una tasa $T_1 = T_7$. Los productos en curso de elaboración constituyen el WIP x_1 hasta que, luego de ser procesados en un tiempo cuya media es el lead time d_1 , son enviados al inventario x_2 a una tasa T_2 . Los productos son finalmente entregados a los clientes a una tasa T_3 . Evidentemente esta última es igual a T_5 puesto que cuando una unidad de producto es embarcada deja al mismo tiempo de formar parte del inventario y de los pedidos pendientes.

Como mencionamos en el apartado anterior, suponemos que las distribuciones de todas las demoras son exponenciales. Sin embargo, aquella que corresponde al tiempo de entrega de pedidos posee, a diferencia de las demás, una media variable d_p definida por:

$$d_p = d_2 + d_3 \frac{ST_0}{x_2}.$$

Si se produjera un solo ítem y hubiera un nivel de stock total suficiente para cubrir los pedidos, d_p sería igual a la demora media de despacho para un bien cuando éste está disponible d_2 . Como consideramos una producción multiproducto, podría suceder que la cantidad total de inventario fuera suficiente, pero no así su composición. Con esto nos referimos a que podría haber en stock una cantidad insuficiente de un artículo en particular de los que conforman un pedido, lo que provocaría cierta demora adicional. Cuanto menor es el nivel de inventario, la probabilidad de que esto suceda es mayor y, en consecuencia, mayor es el tiempo medio de entrega adicional. Lógicamente, si x_2 tiende a cero, la tasa de entrega debe hacerlo también, lo que puede representarse con una demora muy grande (tendiente a infinito) y además, cuando el nivel de stock es muy alto la demora media debería tender a la mínima d_2 . Por dicha razón modelizamos esta demora adicional como una función hiperbólica de x_2 , de modo que ésta adopte el valor d_3 cuando el inventario real se encuentra en el nivel deseado[3].

Ahondemos ahora en la construcción de la política de decisión. Es frecuente encontrar en la bibliografía modelos que utilizan, para decidir la cantidad a ordenar, reglas heurísticas basadas en la tasa demanda esperada y la discrepancia entre el nivel de inventario real y el deseado[4][11]. En nuestro modelo la política de decisión se construye a partir de información adicional, con lo que esperamos un mejor comportamiento del sistema. Más adelante compararemos ambas reglas en base a los objetivos propuestos en la sección 1. La política (*decisión* T_6) que empleamos para decidir la tasa de producción a ordenar T_6 se escribe como:

$$m \begin{cases} g(x_1, x_2, x_3, x_4) & \text{si } m \geq g(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ m & \text{si } m < g(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{cases}$$

donde $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = r_0 + \alpha[(k_2 - x_2) + (k_1 - (x_1 + x_4)) + (x_3 - k_3)]$, y además:

- $k_2 = r_0 s$ es el nivel de inventario deseado, que surge de multiplicar el tiempo que se quiere que el inventario cubra la demanda por la tasa demandada,
- $k_1 = r_0 (d_1 + d_4)$ es la cantidad normal (o deseada) de unidades en proceso administrativo más las que forman el WIP[12],
- $k_3 = r_0 (d_2 + d_3)$ representa la cantidad normal (o deseada) de pedidos pendientes.

La decisión de la tasa de producción surge entonces de sumar a la demanda pronosticada (igual a la real por ser constante) un término adicional que tiene en cuenta las discrepancias que ocurren entre los niveles reales y deseados de las variables del sistema, al que denominamos término correctivo. Más específicamente, éste es mayor cuanto menores son los niveles de inventario real, de órdenes en proceso administrativo y de WIP, y cuanto mayor es el nivel de pedidos pendientes de entrega. Las discrepancias antes mencionadas son afectadas por el factor de amplificación α , que depende en gran medida de las especulaciones del decisor, de su personalidad, y hasta de las circunstancias. Por eso podemos decir que su elección es en gran medida arbitraria y podría ser modificada en el tiempo. Sin embargo, en este modelo consideramos dicho parámetro como invariante.

Vale la pena destacar que si la decisión $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ es mayor a la capacidad máxima del sistema m , se ordena producir dicha tasa (la mayor tasa admisible), puesto que la tasa real no puede superar esta limitante técnica.

Estamos ahora en condiciones de escribir las ecuaciones del modelo, siendo las mismas:

$$\dot{x}_1 = \frac{x_4}{d_4} - \frac{x_1}{d_1} , \tag{1a}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1}{d_1} - f(x_2) x_3 , \tag{1b}$$

$$\dot{x}_3 = r_0 - f(x_2) x_3 , \tag{1c}$$

$$\dot{x}_4 = m - \frac{x_4}{d_4} \quad \text{si } m < g(x_1, x_2, x_3, x_4) , \tag{1d}$$

$$\dot{x}_4 = g(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{x_4}{d_4} \quad \text{si } m \geq g(x_1, x_2, x_3, x_4) , \tag{1e}$$

donde $\dot{} = d/dt$, $x_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$, $m > 0$ y $f(x_2) = (d_p)^{-1}$. Mediante la definición de k_1, k_2, k_3 , la tasa de producción se reescribe como:

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = r_0(1 + \alpha(s + d_1 + d_4 - d_2 - d_3 - x_1 - x_2 + x_3 - x_4)). \tag{2}$$

El sistema (1) es invariante con respecto a la siguiente transformación de escala:

$$x_i \leftarrow \frac{x_i}{r_0}, m \leftarrow \frac{m}{r_0}, g \leftarrow \frac{g}{r_0}.$$

De aquí en más consideramos al mismo escrito en las nuevas variables, con lo cual el parámetro r_0 no aparece en las ecuaciones. Sin embargo, las interpretaciones de las soluciones se harán de acuerdo a las definiciones originales.

Teniendo en cuenta la relación de orden entre m y $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definimos dos regiones en el espacio de fase: Ω_1 definida por $m < g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ y Ω_2 , por $m \geq g(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Cabe destacar que para $m = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ las ecuaciones del sistema en la región Ω_2 y Ω_1 son iguales, por tanto las trayectorias se empalman con continuidad hasta la derivada primera.

En la sección 5.2 nos ocupamos de analizar las condiciones para que las variables sean siempre positivas.

3 Propiedades en la región Ω_1

3.1 Solución explícita

Dado que las Ecs. (1a) y (1d) están desacopladas del resto, las soluciones explícitas de x_1 y x_4 son:

$$\begin{aligned} x_4 &= d_4 m + c_4 e^{-\frac{t}{d_4}}, \\ x_1 &= d_1 m + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}} + c_4 \frac{d_1}{d_4 - d_1} e^{-\frac{t}{d_4}}, \text{ si } d_4 \neq d_1, \\ x_1 &= d_1 m + \frac{c_4}{d_1} e^{-\frac{t}{d_1}} t + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}}, \text{ si } d_4 = d_1, \end{aligned} \quad (3)$$

siendo c_1, c_4 constantes de integración. De esta forma las Ecs.(1b) y (1c) constituyen un sistema bidimensional no autónomo.

Los valores de stock y unidades pendientes de entrega son considerados en la decisión de la tasa de producción. Debido a esto, influyen directamente en el nivel de órdenes en proceso administrativo e indirectamente en el WIP. Como en Ω_1 la decisión g resulta mayor que m , se ordena producir a la tasa máxima, constante y en consecuencia independiente de las variables del sistema. Así, el nivel de x_4 depende sólo de la cantidad acumulada de órdenes y de la demora de programación. El WIP, por su parte, crece a medida arriban a producción las órdenes programadas, y disminuye a medida que los productos son terminados. El flujo de salida depende del lead time de producción y del mismo WIP. En otras palabras, las cantidades de productos en proceso productivo x_1 y administrativo x_4 son independientes de los niveles de inventario x_2 y pedidos pendientes x_3 .

Adicionalmente, es preciso señalar que cuando ambos niveles se estabilizan sus tasas de arribos y partidas son iguales a m .

3.2 Puntos fijos y linealización

Los puntos fijos en la región Ω_1 del espacio de fases existen solo para $m = 1$ y son no aislados, siendo los mismos:

$$x_1^* = d_1, x_2^*, x_3^* = d_2 + d_3 \frac{s}{x_2^*}, x_4^* = d_4. \quad (4)$$

El dominio de x_2^* está determinado por la condición $m < g$, de donde resulta que $0 < x_2^* < s$.

Linealizamos al sistema alrededor de los puntos fijos. Los autovalores de la matriz jacobiana evaluada en (4) son:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{d_1}, \lambda_3 = \frac{-x_2^* - sd_3}{x_2^*(x_2^*d_2 + sd_3)}, \lambda_4 = -\frac{1}{d_4}.$$

Dado que todos los parámetros son positivos, tres de los cuatro autovalores son negativos. Sin embargo, como este resultado corresponde a un desarrollo de primer orden, la presencia del autovalor nulo no nos permite garantizar la estabilidad de los puntos fijos. Discutiremos esta cuestión en la sección 3.4.

3.3 Trayectorias en Ω_1

Utilizando las Ecs. (1a) a (1d) y (2), y derivando a g sobre una trayectoria obtenemos $\dot{g} = -\alpha(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_4 - \dot{x}_3) = -\alpha(m-1)$. Considerando que la trayectoria se inicia en Ω_1 :

- a) Si $m = 1$, entonces g es una curva invariante (el sistema es conservativo) y la órbita permanece siempre en Ω_1 . Teniendo en cuenta que $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = x_1(0) + x_2(0) - x_3(0) + x_4(0) = C$ y usando las Ecs. (1b), (1c) y (3) obtenemos $x_2 - x_3 = -\frac{d_4}{d_4 - d_1}c_4e^{-\frac{t}{d_4}} - c_1e^{-\frac{t}{d_1}} + C - (d_1 + d_4)$. Entonces para $t \rightarrow \infty$, $x_3^* = x_2^* - C + d_1 + d_4$, al ser $x_3^* = d_2 + d_3\frac{s}{x_2^*}$, obtenemos el valor que asume el punto fijo (4) en función de las condiciones iniciales:

$$x_1^* = d_1, x_2^* = \frac{1}{2} \left(C - d_1 - d_4 + d_2 + \sqrt{(C - d_1 - d_4 + d_2)^2 + 4d_3s} \right),$$

$$x_3^* = d_2 + d_3\frac{s}{x_2^*}, x_4^* = d_4.$$

En esta región, el valor de equilibrio de la tasa de salida de producción T_2 que alimenta al inventario está dada por el límite de capacidad. Dado que los pedidos arriban al ritmo de la demanda, que ésta es igual a la capacidad máxima, y que además las tasas de egreso desde los niveles de pedidos pendientes y stock son las mismas, el sistema se aproxima al equilibrio, tendiendo T_5 y T_3 al valor de T_2 .

- b) Cuando $m < 1$, $\dot{g} > 0$. Dado que $g(0) > m$, entonces $g(t) > m$ y por lo tanto la órbita permanece siempre en Ω_1 , como mostramos en la Fig. 2a. Por igual razonamiento que en el caso anterior tenemos $x_2 - x_3 = (m-1)t - \frac{d_4}{d_4 - d_1}c_4e^{-\frac{t}{d_4}} - c_1e^{-\frac{t}{d_1}} + C - (d_1 + d_4)$. Luego, para $t \gg 1$, $x_2 - x_3$ diverge linealmente.

Por otra parte, cuando $t \rightarrow \infty$, $x_1 \rightarrow d_1m$ y $x_4 \rightarrow d_4m$ y por lo tanto resulta:

$$\dot{x}_2 \cong M - f x_3, \tag{5}$$

$$\dot{x}_3 \cong 1 - f x_3. \tag{6}$$

Proponemos el ansatz $\dot{x}_2 \rightarrow 0$. De la primera ecuación obtenemos $x_3 = m \left(d_2 + d_3 \frac{s}{x_2} \right)$ y restando las dos ecuaciones resulta $\dot{x}_3 = 1 - m$. Combinando ambos resultados concluimos que asintóticamente $x_3 \approx (1 - m)t$ y $x_2 \approx \frac{d_3 sm}{(1 - m)t}$.

En el largo plazo, la tasa de ingreso de productos al inventario tiende a la capacidad máxima de producción, que es menor que la demanda. Puesto que la tasa de embarque T_3 es siempre igual a la de egreso de pedidos pendientes T_5 , es evidente que el stock es insuficiente para cumplir con los pedidos. Luego, la cantidad de productos pendientes de entrega crece indefinidamente mientras que el inventario se va agotando. El ritmo al cual aumentan dichos pedidos en espera es igual a la diferencia entre la demanda y la capacidad máxima.

- c) El último caso corresponde a $m > 1$, para lo cual $\dot{g} < 0$. Por lo tanto, aún cuando $g(0) > m$, existe un $t = t^*$ a partir del cual $g < m$ y la órbita pasa a la región Ω_2 como podemos ver en la Fig. 2b. El valor de t^* es la raíz de la ecuación $g(t^*) = m$.

Si la demanda es menor que la capacidad máxima, el stock comenzará a incrementarse haciendo que la demora media de entrega d_p sea aproximadamente constante. De esta forma, el nivel de pedidos x_3 tenderá a estabilizarse, al igual que x_1 y x_4 , mientras que el stock seguirá aumentando. Llegará un momento en que el exceso de stock real respecto del deseado hará que la regla de decisión indique producir a una tasa menor al tope de capacidad.

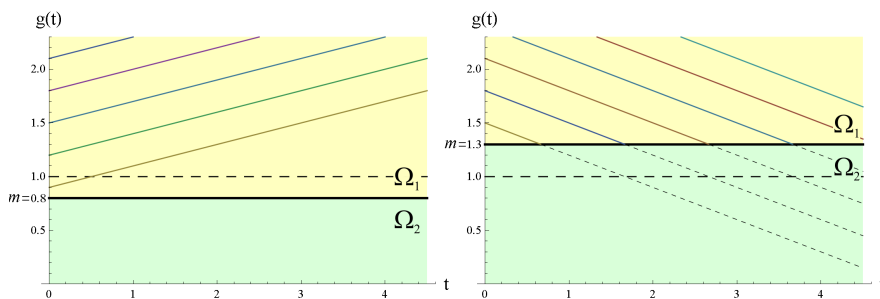


Fig. 2. Curvas de $g(t)$ en la región Ω_1 para $m = 0, 8$ y $m = 1, 3$, con distintas condiciones iniciales, representadas en línea fina continua.

3.4 Plano de fases asintótico

Cuando $m \leq 1$ la órbita permanece siempre en Ω_1 . Entonces para $t \gg 1$ utilizamos el plano de fases asintótico (x_2, x_3) . A partir de las Ecs. (5) y (6)

definimos dos curvas: γ_1 , dada por $x_3 = m(d_2 + sd_3/x_2)$, sobre la cual $\dot{x}_2 = 0$ y γ_2 , definida por $x_3 = d_2 + sd_3/x_2$, donde se cumple $\dot{x}_3 = 0$. En la Fig. 3a representamos el campo vectorial y ambas curvas. La región contenida entre la curva superior γ_2 y la inferior γ_1 es un atractor global de las trayectorias y, como ya demostramos en la sección 3.3, $x_2 \rightarrow 0$ y $x_3 \rightarrow \infty$.

Basándonos en los resultados anteriores, podemos determinar la estabilidad de los puntos fijos (4). Cuando $m \rightarrow 1$, la curva $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$, y dado que los pares $\{x_2^*, x_3^*\}$ están contenidos en γ_2 , los puntos fijos $\{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$ son atractores globales. En la Fig. 3b se representa el campo vectorial y $\gamma_2 \equiv \gamma_1$. Asintóticamente las trayectorias son rectas ya que las componentes del flujo son iguales.

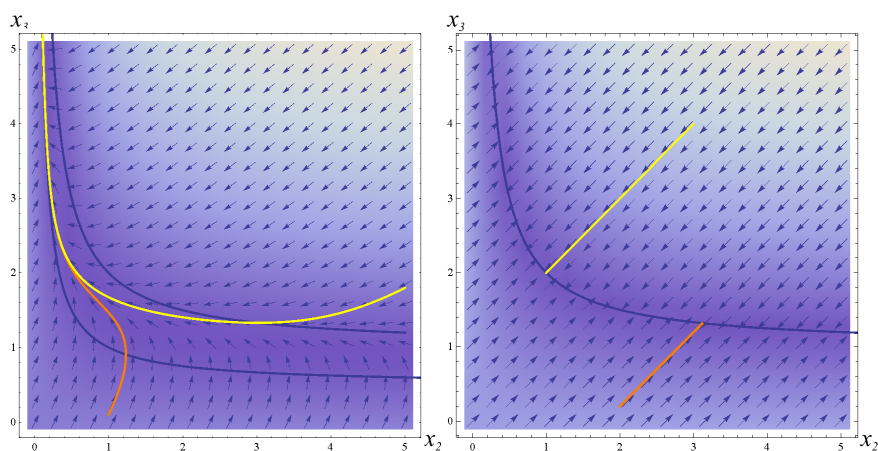


Fig. 3. Mapas de fases (x_2, x_3) , para $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = s = 1$. Para la 3a $m = 0.5$ y para la 3b $m = 1$. En azul las nullclines γ_1 y γ_2 . En amarillo y anaranjado, dos soluciones particulares.

4 Propiedades en la región Ω_2

4.1 Puntos fijos y estabilidad

La dinámica del sistema en la región Ω_2 está definida por las Ecs. (1a) a (1c) y (1e). De las mismas es simple obtener el punto fijo cuyas componentes son todas positivas, siendo el mismo:

$$x_1^* = d_1, x_2^* = s, x_3^* = d_2 + d_3, x_4^* = d_4. \tag{7}$$

Para que el mismo cumpla la condición $m \geq g$ es necesario que $m \geq 1$. En particular, cuando $m = 1$ el punto fijo es solución estacionaria para ambas regiones, es decir se encuentra en la frontera que separa las regiones Ω_1 y Ω_2 .

Existe un segundo punto fijo con valor negativo de x_2 . Sin embargo, como demostramos en la sección 5.2, cuando los valores iniciales son mayores a cero, y además g se mantiene siempre positiva, las variables nunca se hacen negativas. Así, el punto fijo (7) es el único atractor posible en esta región.

Analizamos la estabilidad linealizando el sistema alrededor del punto fijo. Luego, los autovalores de la matriz jacobiana son:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{d_1}, \lambda_2 = -\frac{1}{d_4}, \lambda_3 = -\alpha, \lambda_4 = \frac{-(d_3 + s)}{s(d_2 + d_3)}.$$

Por ser todos los parámetros positivos, el punto fijo es asintóticamente estable.

Notemos que los valores estacionarios del WIP, de la cantidad de pedidos pendientes, y del nivel de órdenes en proceso administrativo son iguales a los valores definidos como deseados y dependen directamente de las demoras asociadas. Como consecuencia, vemos el potencial de mejora de las inversiones destinadas a la disminución de: 1) el lead time de producción, para reducir el nivel de productos en curso de elaboración y las desventajas que esto provoca, como problemas de gestión visual, accidentes, mermas por almacenamiento inadecuado entre puestos de trabajo, alto costo financiero[13] y 2) el lead time de entrega, para operar con una cantidad menor de pedidos pendientes, mejorando así la calidad de servicio al cliente.

Con un criterio similar, podemos resaltar la necesidad de reducir el nivel inventario deseado, reduciendo los costos de gestión de stocks asociados al nivel del mismo[14]. Si bien podría parecer arbitraria la decisión acerca del inventario deseado que utiliza la política propuesta, ésta tiene sus fundamentos racionales: un stock deseado mayor a cero tiene sentido en la práctica debido a la posibilidad de que ocurran problemas que rompan el equilibrio entre la tasa de producción y la demanda. Este fenómeno puede ser originado por un aumento en el nivel de la demanda, por la fallas o roturas de equipos, por conflictos de personal, entre otros. Aquí se pone de manifiesto la necesidad de mejorar la precisión de los pronósticos, de elevar el nivel de satisfacción del personal de la empresa a través de políticas adecuadas de administración de RR. HH. y de contar con un proceso de mejora continua con vistas a implementar el Mantenimiento Productivo Total y reducir los tiempos de puesta a punto de máquinas, por nombrar sólo algunas de las posibles medidas.

Por último, y no por eso menos importante, del análisis de los autovalores es inmediato que: 1) tanto la reducción de los lead times y de s , como el incremento de α , aumentan la velocidad con la que el sistema se estabiliza, es decir, su flexibilidad, y 2) las soluciones en esta región no oscilan por ser los autovalores negativos.

4.2 Trayectorias en Ω_2

Combinando las ecuaciones del sistema para esta región con la definición (2), la variación de g sobre una curva solución contenida en Ω_2 es $\dot{g} = \alpha(1 - g)$ y por lo tanto:

$$g = 1 + c_g e^{-\alpha t}. \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que $g \leq m$ tenemos los siguientes casos:

- a) Cuando $m \geq 1$, y teniendo en cuenta que $g \rightarrow 1$ para $t \rightarrow \infty$, toda órbita que se inicia en Ω_2 permanece siempre en dicha región, como mostramos en la Fig. 4a.

En otras palabras, la variación en la decisión de la tasa de producción hace que la misma se aproxime gradualmente a la demanda sin experimentar oscilaciones. En definitiva, la política empleada es efectiva a la hora de evitar los efectos nocivos de la oscilación en la tasa de producción que mencionamos en la sección 1. Además, vemos que cuanto mayor es el factor de amplificación del término correctivo de la decisión, el sistema alcanza más rápidamente el régimen estacionario. Sin embargo, debemos tener cuidado a la hora de escogerlo, pues un valor de α demasiado grande puede alejar excesivamente las variables del punto de equilibrio durante el régimen transitorio.

- b) Si $m < 1$, entonces $\dot{g} > 0$, y por lo tanto existe un tiempo $t = t^*$ para el cual la órbita pasa a la región Ω_1 , como podemos apreciar en la Fig. 4b.

Evidentemente, ante un demanda muy elevada (superior a la mayor tasa máxima), el sistema aumentará la tasa de producción intentando alcanzarla. Sin embargo, no podrá aumentar dicha tasa más allá de lo técnicamente factible y la decisión será, una vez activa la restricción, producir a la máxima capacidad.

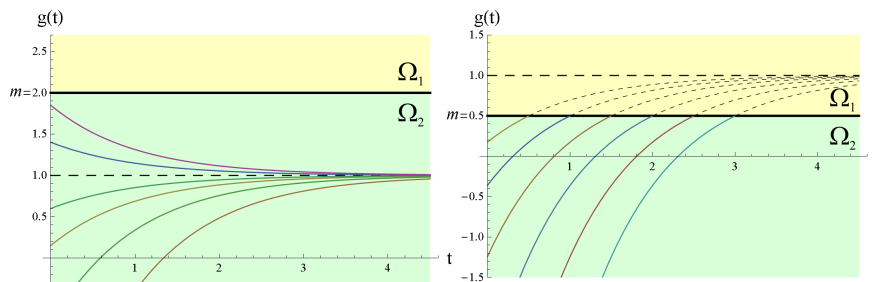


Fig. 4. Curvas de $g(t)$ en la región Ω_2 para $m = 2$ y $m = 0,5$, comenzando con distintos valores iniciales, representadas en línea fina continua.

4.3 Soluciones explícitas

Reemplazando la Ec.(8) en la Ec.(1e) e integrando obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= d_4 + \frac{d_4}{(1 - \alpha d_4)} c_g e^{-\alpha t} + c_4 e^{-\frac{t}{d_4}} & \text{si } \frac{1}{\alpha} \neq d_4, \\
 x_4 &= \frac{1}{\alpha} + c_g e^{-\alpha t} t + c_4 e^{-\alpha t} & \text{si } \frac{1}{\alpha} = d_4,
 \end{aligned}$$

siendo c_4 una constante de integración y $c_g = (g(0) - 1)$. Sustituyendo esta solución en la Ec.(1a) e integrando obtenemos x_1 para los distintos valores de los parámetros:

$$x_1 = d_1 + \frac{d_1}{(1 - \alpha d_1)(1 - \alpha d_4)} c_g e^{-\alpha t} + \frac{d_1}{d_4 - d_1} c_4 e^{-\frac{t}{d_4}} + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}},$$

si $\frac{1}{\alpha} \neq d_4 \wedge \frac{1}{\alpha} \neq d_1 \wedge d_4 \neq d_1$;

$$x_1 = d_1 + \frac{d_1}{(\alpha d_1 - 1)^2} c_g e^{-\alpha t} + \frac{1}{d_1} c_4 e^{-\frac{t}{d_1}} t + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}},$$

si $\frac{1}{\alpha} \neq d_4 \wedge \frac{1}{\alpha} \neq d_1 \wedge d_4 = d_1$;

$$x_1 = d_1 + \frac{(d_4 d_1 - d_1^2) c_4 + d_4 d_1^2 c_g}{(d_4 - d_1)^2} e^{-\frac{t}{d_4}} + \frac{d_1}{d_4 - d_1} c_g e^{-\frac{t}{d_4}} t + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}},$$

si $\frac{1}{\alpha} = d_4 \wedge \frac{1}{\alpha} \neq d_1$;

$$x_1 = d_1 + \frac{d_1}{d_1 - d_1} c_4 e^{-\frac{t}{d_4}} - \frac{d_1}{d_4 - d_1} c_g e^{-\frac{t}{d_1}} t + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}}, \text{ si } \frac{1}{\alpha} \neq d_4 \wedge \frac{1}{\alpha} = d_1;$$

$$x_1 = d_1 + \frac{1}{d_1} c_4 e^{-\frac{t}{d_1}} t + \frac{1}{2d_1} c_g e^{-\frac{t}{d_1}} t^2 + c_1 e^{-\frac{t}{d_1}}, \text{ si } \frac{1}{\alpha} = d_4 = d_1;$$

donde c_1 es una constante de integración. Entonces, para cualquier valor de m , tenemos que $x_1 \rightarrow x_1^* = d_1$ y $x_4 \rightarrow x_4^* = d_4$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.4 Comportamiento asintótico

Si $m \geq 1$ y teniendo en cuenta el resultado anterior, cuando $t \gg 1$ el sistema se escribe como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 1 - f(x_2)x_3, \\ \dot{x}_3 &= 1 - f(x_2)x_3. \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos $x_3 = x_2 + C$. El plano de fases (x_2, x_3) de este sistema es similar al obtenido en Ω_1 cuando $m = 1$, por lo tanto el punto fijo contenido en Ω_2 es un atractor en la misma.

5 Discusiones

5.1 Análisis de la interacción entre regiones Ω_1 y Ω_2

El factor crítico que determina las cualidades de la dinámica del modelo es m , el cual indica la relación entre la capacidad máxima y la demanda. Teniendo en cuenta los resultados de las dos regiones:

- Para $m = 1$ el sistema se estabiliza en un punto fijo, tanto si parte de Ω_1 como de Ω_2 .
- Para $m < 1$, si las condiciones iniciales pertenecen a Ω_1 , el sistema permanece allí indefinidamente, mientras que si pertenecen a Ω_2 el sistema cambia de región en un tiempo característico $t^{*(2)}$ para luego permanecer en Ω_2 (ver Fig. 5a).
- Para $m > 1$, si la trayectoria parte de Ω_2 el sistema se dirige a un punto fijo situado en la frontera que divide ambas regiones, sin cambiar nunca de región, en tanto que si $m < 1$ sí lo hace, en un tiempo $t^{*(1)}$, permaneciendo luego en Ω_1 (ver Fig. 5b).
- Cualquiera sea el valor de m , el comportamiento en ambas regiones no presenta oscilaciones.

De esta manera, hemos demostrado en forma rigurosa la ausencia de oscilaciones en las tasas y niveles del sistema y, en consecuencia, la imposibilidad de soluciones caóticas a pesar de que la dinámica es no-lineal[6].

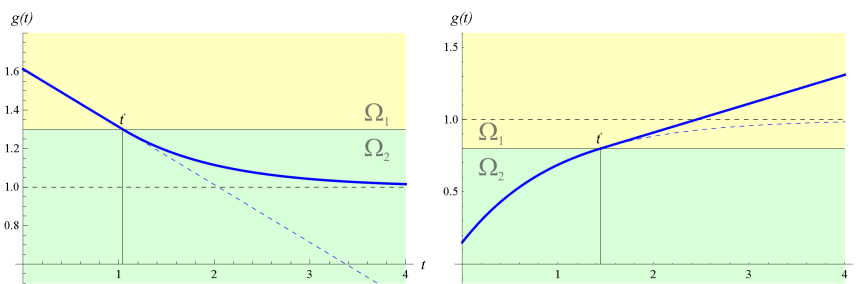


Fig. 5. Comportamientos del sistema que exhiben cambios de región. Los valores de m se representan con línea llena negra, siendo: $m = 1.3$ para la Fig. 5.1 y $m = 0.8$ para la Fig. 5.2.

Para dar cuenta del potencial de la regla de decisión utilizada, comparémosla con una que no considere la discrepancia entre los niveles real y deseado de WIP, es decir que $g = 1 + \alpha(s - x_2 + x_3 - d_2 - d_3)$. Exceptuando la nueva ley de g , el sistema de ecuaciones (1) permanece igual. Derivando g y utilizando las Ecs. (1b) y (1c) resulta $\dot{g} = \alpha(1 - \frac{x_1}{d_1})$ que junto a las Ecs. (1a) y (1e) conforma un sistema lineal. La matriz de coeficientes del sistema resultante posee un par de autovalores con parte imaginaria no nula, con lo que se demuestra la presencia de oscilaciones en la tasa de producción. Además, los puntos fijos de este sistema son iguales a los calculados en las secciones 3 y 4. De este modo, resulta evidente que pasar por alto o no disponer de información acerca del estado actual del WIP puede traer consecuencias perjudiciales para la dinámica el modelo.

5.2 Condiciones suficientes para la positividad de los niveles

Tomemos las Ecs. (1b) y (1c). Sabiendo que $f(x_2) > 0$ si $x_2 > 0$ y suponiendo $x_2(0) > 0$, $x_3(0) > 0$, $k \in (0, 1)$ y $x_1/d_1 > k$, tenemos que: si $x_3 < k/f(x_2)$, $x_2 > 0$ y $x_3 > 0$, entonces $\dot{x}_2 > 0$ y $\dot{x}_3 > 0$, por ser $x_3 f(x_2) < k < x_1/d_1$. De esta forma si $x_3(0) < k/f(x_2(0))$, entonces x_2 y x_3 crecen ambas en forma monótona hasta que $x_3 \geq k/f(x_2)$; mientras que si $x_3(0) \geq k/f(x_2(0))$, ni x_2 ni x_3 pueden hacerse negativas puesto que para que esto suceda alguna de las dos debe decrecer en la zona $x_3 < k/f(x_2)$, lo cual es imposible por las características del flujo en la misma. Asimismo, podemos escoger un k tan próximo a cero como queramos y por lo tanto, si x_1 es siempre mayor a cero y los valores iniciales de x_2 y x_3 son positivos, entonces x_2 y x_3 permanecen siempre positivos. Mostramos geoméricamente lo demostrado con un ejemplo en la Fig. 6.

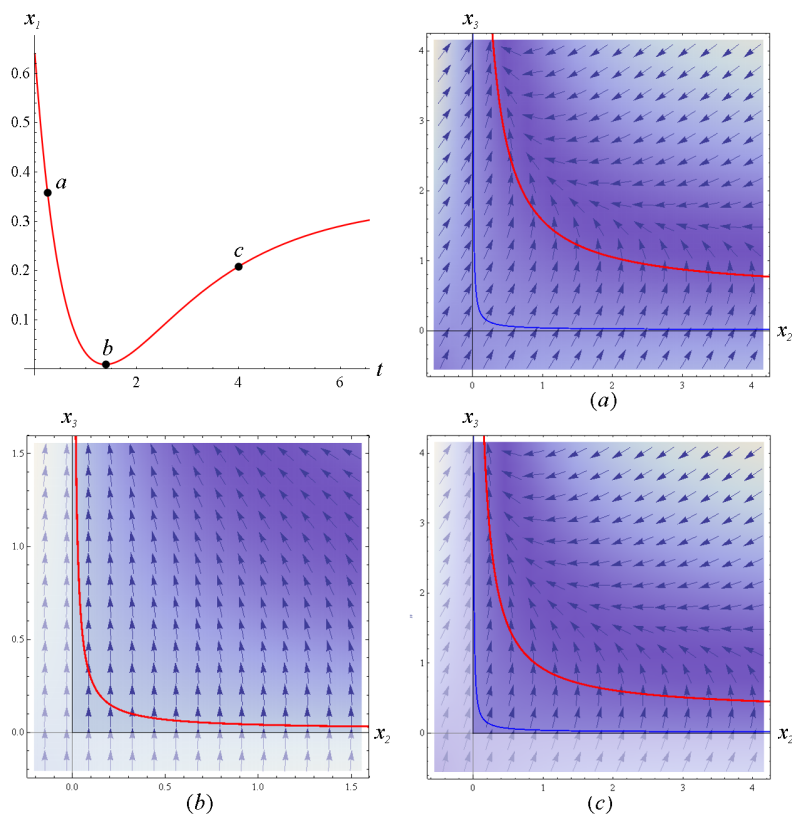


Fig. 6. Gráfica de la evolución de x_1 en el tiempo y planos de fases (x_2, x_3) para cada punto señalado en la misma. En éstos, representamos la curva γ (en rojo) de ecuación $x_3 = (x_1/d_1)/f(x_2)$. Debajo de γ , ambas componentes del flujo son positivas por ser $x_1/d_1 < 1$, y por lo tanto lo son debajo de φ (en azul) de ecuación $x_3 = k/f(x_2)$, siendo kd_1 la cota inferior de x_1 . Para la gráfica (b) tenemos que $\gamma \equiv \varphi$.

Por otro lado, de la Ec. (1a) obtenemos que: para $x_1 < (d_1/d_4)x_4$ se cumple $\dot{x}_1 > 0$. De este modo, si $x_1(0) > 0$ y $x_4 > 0$, entonces $x_1 > 0$ (ver Fig. 7).

De la Ec. (1d) es inmediato que para $x_4 < d_4m$ tenemos que $\dot{x}_4 > 0$. Esto implica que, si se comienza en la región Ω_1 con $x_4(0) > 0$, entonces x_4 se mantiene siempre positiva. Con un análisis similar de la Ec. (1e) tenemos que para $x_4 < d_4g$ se cumple $\dot{x}_4 > 0$, y en consecuencia si $x_4(0) > 0$ y $g > 0$, tenemos que $x_4 > 0$. En la Fig. 7 mostramos un ejemplo gráfico.

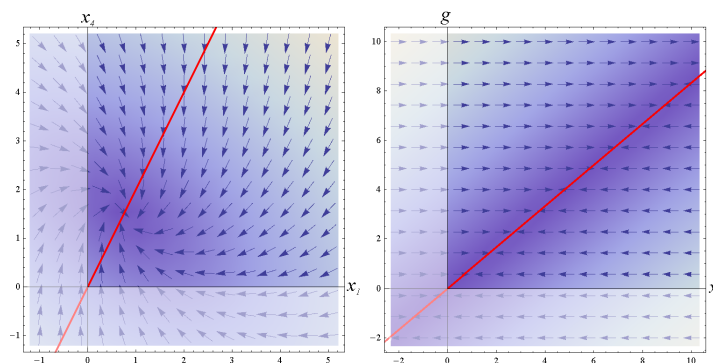


Fig. 7. En la 7a, el mapa de fases (x_1, x_4) . Observamos que para x_1 a la izquierda de la nullcline $(x_4 < \frac{d_1}{d_4}x_1)$ se cumple $\dot{x}_1 > 0$. En la 7b representamos el campo vectorial $\vec{V}(x_4, g) = (\dot{x}_4, 0)$. Es fácil ver que $\dot{x}_4 > 0$ cuando $g > \frac{1}{d_4}x_4$.

Combinando todos los resultados obtenidos aquí y en la sección 5, y considerando que g es una función continua monótona que tiende a 1 o a $+\infty$ según el valor de m , concluimos:

- Si el sistema comienza en la región Ω_1 con condiciones iniciales positivas, entonces las variables se mantienen siempre mayores a cero.
- Si en cambio comienza en Ω_2 con valores iniciales mayores a cero y $g(0) > 0$, los niveles permanecen siempre positivos.

Por lo tanto, siendo los niveles inicialmente positivos, es condición suficiente para garantizar la positividad de las variables que la política de decisión arroje al comienzo una tasa de producción mayor a cero.

Podemos incluir en el modelo una condición que impida que la decisión acerca de cuánto ordenar sea negativa. Para ello redefinimos la región Ω_2 como aquella en que $0 \leq g < m$, y definimos la región Ω_3 para $g < 0$, donde $\dot{x}_4 = -\frac{x_4}{d_4}$. El sistema tiene, en la nueva región Ω_3 , características análogas a las presenta en Ω_1 . Para obtenerlas basta con hacer $m = 0$ en los resultados obtenidos en la sección 3. Considerando las propiedades ya enunciadas de g es fácil comprobar que el sistema sólo puede operar en Ω_3 si inicialmente se encuentra en dicha región. En tal caso, por ser $\dot{g} = \alpha$ en Ω_3 , indefectiblemente el sistema pasará a

Ω_2 en un $t = t^*$ y a partir de ese momento se comportará del modo descrito en la sección 5.1.

5.3 Aplicabilidad del modelo

Una de las hipótesis que presentamos al comienzo del trabajo fue que todas las demoras tienen distribución Exponencial con media conocida. En la práctica, sea por costumbre, por sus propiedades o por la facilidad de encontrar valores de sus parámetros para superar un test de bondad de ajuste, suele utilizarse la distribución Normal incluso para ajustar tiempos. Sin embargo, el dominio de la función densidad de probabilidad asociada abarca a todos los reales; mientras que lo teóricamente correcto es ajustar tiempos con distribuciones que no admitan valores negativos. La distribución Gamma posee estas características y es lo bastante flexible como para representar un elevado número de casos. Si la empleamos para representar las demoras de producción y proceso administrativo, utilizando un número n de demoras exponenciales de primer orden en serie (con medias distintas en el caso más general), es fácil comprobar que el valor de los puntos fijos y las propiedades cualitativas de g se mantienen iguales. Luego, un sistema de éstas características se comporta cualitativamente en forma similar al propuesto, lo que permite extender la aplicabilidad del modelo.

6 Conclusiones

El enfoque utilizado en este trabajo ha permitido describir analítica y rigurosamente la dinámica del modelo. La principal ventaja que de este hecho se deriva, es la posibilidad de extraer conclusiones generales acerca del funcionamiento del sistema de producción ante la política de decisión empleada.

Si bien su aplicación no es universal, podemos nombrar varios tipos de empresa sobre los cuales el modelo tiene validez: agroindustrias (aceiteras, molinerías, acopiadoras de granos), fábrica de productos alimenticios (fábrica de helados, dulces y bebidas), industrias autopartista, petroleras. Por otro lado, la simplicidad con la que representamos el sistema nos permite adquirir una buena aproximación global de su comportamiento y sirve al mismo tiempo de guía para un análisis más profundo, ya que comenzar por lo simple es en general el camino más rápido y directo para comprender lo complejo[7].

En nuestro modelo, se pone de manifiesto el beneficio de contar con un sistema de información confiable y eficiente, que permita conocer de manera integral y precisa el estado del sistema. Disponer de información de calidad posibilita implementar una política de decisión más desarrollada, que tenga en cuenta variables adicionales al nivel de inventario, tales como el WIP, la cantidad de productos programados que aún no han comenzado a manufacturarse y la cantidad de pedidos pendientes de entrega.

En particular, la regla de decisión que hemos utilizado impide el comportamiento oscilatorio del sistema, y por ende también el caótico[6]. La implicancia práctica de tal resultado es la posibilidad de predecir cualitativamente la

evolución de todo el sistema, a pesar de haber obtenido la solución explícita sólo para la evolución del WIP y la cantidad de órdenes en proceso administrativo. Para ello se requiere conocer los valores de los parámetros, siendo crítico m (relación entre la capacidad máxima y la demanda). Además, en la sección 5.1 pudimos ver cómo la regla heurística propuesta supera a una más simple frecuentemente utilizada en el ámbito académico y en la práctica industrial, que conlleva a soluciones oscilatorias.

Finalmente, logramos identificar oportunidades de mejora y proponer acciones que repercutan positivamente sobre el sistema. He aquí la utilidad de la dinámica de sistemas desde el punto de vista ingenieril. Su aplicación permite evaluar, comprender y mejorar cualquier idea que busque incrementar la productividad de una organización, su flexibilidad y su nivel de competitividad en el mercado. Serán temas de investigaciones futuras el análisis del comportamiento del sistema ante distintos patrones de demanda y el estudio de una política de control de stock análoga a la del modelo EOQ[15], desde el punto de vista sistémico.

References

1. Hillier, F. S., Lieberman, G. J.: Introduction to Operations Research. McGraw-Hill, New York (2002)
2. Van Gigh, J. P.: Teoría general de sistemas. Trillas, México (1987)
3. Forrester, J.W.: Industrial Dynamics. Productivity Press, Cambridge (1961)
4. Sterman, J.D.: Business Dynamics: Systems Thinking and Modeling for a Complex World. Irwin McGraw-Hill, Boston (2000)
5. Senge, P. et al.: The Fifth Discipline Fieldbook: Strategies and Tools for Building A Learning Organization. Broadway Business, New York (1994)
6. Strogatz, S. H.: Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Addison-Wesley, Reading (1994)
7. Coddington, E. A.: An Introduction to Ordinary Differential Ecuations. Prentice Hall, New York (1968)
8. Blanchard, P., Devaney, R. L., Hall, G. R.: Ecuaciones diferenciales. International Thomson Editores, México (1999)
9. Saleh, M. et al.: A Comprehensive Analytical Approach for Policy Analysis of System Dynamics Models. European Journal of Operational Research 203, 673–683 (2010)
10. Bedworth, D. D., Bailey, J. E.: Integrated Production Control Systems. John Wiley & Sons, New York (1982)
11. Gordon, G.: System Simulation. Prentice Hall, Upper Saddle River (1977)
12. Hopp, W. J., Spearman, M. L.: Factory Physics. McGraw-Hill, Ann Arbor (2007)
13. Maynard, H., Zandin, K.: Maynard's Industrial Engineering Handbook. McGraw-Hill, New York (2001)
14. Silver, E. A.: Inventory Management and Production Planning and Scheduling. John Wiley & Sons, New York (1998)
15. Harris, F.W.: How Many Parts To Make At Once. Factory, The Magazine of Management 10(2), 135-136, 152 (1913)